# CHAPITRE VI Probabilités 1
# L'espace probabilisé ($\Omega$, $\mathfrak{T}$, $\mathbb{P}$) (univers, évènements, probabilité)
# Généralités et calculs sur les univers dénombrables et finis

**Préalable** : introduction aux séries, ou sommes infinies

Déf : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Si la somme partielle $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite finie lorsque $[n\to+\infty]$, on dit que la **série** de terme générale $(u_n)$ converge, et sa limite est notée $S=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ $\quad (S=\lim_{n\to+\infty} S_n)$.

Ex : pour $x\in]-1,1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k=\frac{1}{1-x}$, mais si $x\notin]-1,1[$ la série de terme général $(x^k)$ diverge.

Dans le cas où tous les termes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs et que la série converge vers une limite finie, on peut les sommer dans n'importe quel ordre, et il est alors licite de noter $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ . Pour une famille de terme positifs $(u_n)_{n\in I}$, où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$, on peut noter $\sum_{n\in I} u_n$ .

Ex : pour $x\in[0\,;1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k=\sum_{k\in\mathbb{N}} x^k=\frac{1}{1-x}$

## A) LE TRIPLET FONDAMENTAL ($\Omega$, $\mathfrak{T}$, $\mathbb{P}$) (Kolmogorov 1933)

Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît à l'avance toutes les issues possibles mais dont on ne peut prédire le résultat de l'une d'entre elles avant de la réaliser.

### I) ÉVÈNEMENTS

#### 1) L'ensemble fondamental $\Omega$

Def : L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers, ou univers des possibles, ou ensemble fondamental. On le note en général $\Omega$, et il doit être non vide.

Ses éléments $\omega\in\Omega$ sont appelés épreuves ou éventualités, ou évènements élémentaires.

**$\Omega$ peut être fini**

Ex jeux de pile ou face, loterie, dés, cartes, etc…

**$\Omega$ peut être infini continu**

Ex : durées de vie d'appareils (lois exponentielles), résultantes d'un modèle scientifique ou économique (par exemple l'inflation de l'année 2015 en France : $i\in[-1\,;2]$)

**$\Omega$ peut être discret dénombrable mais infini**

Ex : on lance une pièce de monnaie jusqu'à ce que l'on obtienne « pile », le résultat de l'expérience aléatoire est le numéro d'ordre du lancer qui a produit « pile ». Ici $\Omega=\mathbb{N}^*$.

Ex : On lance une infinité de fois une pièce : en notant 0 pour « pile » et « 1 » pour face, une éventualité est une suite réelle $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui représente la liste des résultats obtenus aux lancers, le terme de rang $n$ $(\omega_n)$ représentant le résultat du $n$-ième lancer. $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites indexées sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\{0 ; 1\}$. Par exemple n'obtenir que des « pile » se note $\omega = (0,0,0,...)$.

Ex : On effectue une infinité de tirages successifs **avec remise** d'une boule, dans une urne de $X$ boules numérotées : une éventualité $\omega=(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des numéros tirés, le terme de rang $n$ $(\omega_n)$ représentant le numéro obtenu lors du du $n$-ième tirage. Ici $\Omega=[[1,X]]^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites indexées sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $[[1,X]]$.

## 2) La tribu des évènements

Dans le triplet fondamental, $\boxed{\mathfrak{T} \text{ est l'ensemble des évènements}}$. Modélisation retenue par les mathématiciens du XXème siècle :

Déf : un évènement A est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ (càd une partie $A\subset\Omega$).

Une éventualité $\omega\in\Omega$ étant réalisée, on dit que l'évènement A est réalisé ssi $\omega\in A$.

Donc $\mathfrak{T}\subset\mathcal{P}(\Omega)$

**Question** : tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ est-il un évènement ? Pas nécessairement, tout dépend du modèle retenu, en fonction de quels objectifs de calcul.

Exemple : cas classique du jeu de 32 cartes parmi lesquelles on en tire 1. En attribuant un indice à chaque carte, $\Omega$ est l'ensemble des 32 indices, parmi lesquels un seul va se réaliser.

—Si l'on voulait calculer des probabilités sur l'apparition des couleurs (trèfle, pique, cœur, carreau) on pourrait prendre $\mathfrak{T}_1=\{T,P,Co,Ca\}$, où chacun de ces 4 ensembles contient les 8 indices des cartes de sa couleur. Avec ce choix, « la carte tirée est un as » n'est pas un évènement, ce qui n'est pas un problème pour l'objectif de calcul initial (on verra dans le paragraphe suivant que pour d'autres raisons $\mathfrak{T}_1$ n'est pas satisfaisant comme ensemble d'évènements).

—Si l'on voulait calculer des probabilités sur l'apparition des figures (valet, dame, roi, as) on pourrait prendre $\mathfrak{T}_2=\{V,D,R,A,PUF\}$, où les 4 ensembles V D R A contiennent les 4 indices des figures correspondantes, et PUF (« pas une figure ») contient les indices des autres choix. Avec ce choix, « la carte tirée est rouge» n'est pas un évènement, ce qui n'est pas un problème pour l'objectif de calcul initial (on verra dans le paragraphe suivant que $\mathfrak{T}_2$ n'est pas non plus satisfaisant comme ensemble d'évènements).

**Question** : est-ce que tout ensemble $\mathfrak{T}$ de parties de $\Omega$, adapté aux objectifs de calcul, est acceptable comme évènement ?

**L'ensemble des évènements doit raisonnablement satisfaire aux propriétés suivantes :**

Il doit contenir $\boxed{\text{l'évènement impossible } \varnothing}$.

Il doit contenir $\boxed{\text{l'évènement certain } \Omega}$.

$\mathfrak{T}$ doit contenir, si $A,B\in\mathfrak{T}$, les évènements $\boxed{\text{« A ou B », } A\cup B\in\mathfrak{T}}$ ; $\boxed{\text{« A et B », } A\cap B\in\mathfrak{T}}$, et aussi $\boxed{\text{l'évènement « contraire de A » } \bar{A}=\Omega\setminus A\in\mathfrak{T}}$.

Question : dans le cadre du jeu de cartes ci-dessus, $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ sont-ils satisfaisants comme ensembles d'évènements ?

Déf/thm : soit $\Omega$ un ensemble fondamental d'éventualités et $\mathfrak{T}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ un ensemble d'évènements (càd de parties de $\Omega$ ), alors $\mathfrak{T}$ doit être une algèbre de Boole, qui satisfait les trois axiomes suivants :

(AB1) $\Omega\in\mathfrak{T}$

(AB2) si $A\in\mathfrak{T}$ et $B\in\mathfrak{T}$ alors $A\cup B\in\mathfrak{T}$

(AB3) si $A\in\mathfrak{T}$ alors $\bar{A}\in\mathfrak{T}$

De ces trois axiomes découlent aussi quatre autres propriétés fondamentales :

$\bar{\Omega}=\varnothing$ donc (AB1) et (AB3) impliquent (AB4) $\varnothing\in\mathfrak{T}$

$A\cap B=\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}$ (Morgan) donc (AB2) et (AB3) impliquent (AB5) $A\cap B\in\mathfrak{T}$

Par itérations successives (AB2) implique (AB6) $\forall A_1,A_2,\dots,A_n\in\mathfrak{T},\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i\in\mathfrak{T}$

de même (AB5) implique (AB7) $\forall A_1,A_2,\dots,A_n\in\mathfrak{T},\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i\in\mathfrak{T}$

((AB6) et (AB7) se lisent : toute réunion finie d'évènement de $\mathfrak{T}$ est un évènement de $\mathfrak{T}$, tout intersection finie d'évènements de $\mathfrak{T}$ est un évènement de $\mathfrak{T}$.

**Insuffisance de cette définition** : si l'ensemble $\Omega$ des éventualités est fini il suffit que l'ensemble $\mathfrak{T}$ des évènements soit une algèbre de Boole. Mais si $\Omega$ est infini alors on peut vouloir procéder à des réunions et intersections infinies d'évènements (ex d'un jeu de pile ou face répété à l'infini : l'év « pile apparaît périodiquement » serait une réunion infinie d'évènements, puisqu'il y aurait une infinité de périodes possibles).

Or, SI $\mathfrak{T}$ EST UNE ALGEBRE DE BOOLE, LES PROPRIETES CI-DESSUS N'IMPOSENT PAS QUE $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_I$ ET $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_I$ SOIENT DES EVENEMENTS POSSIBLES DE L'ENSEMBLE $\mathfrak{T}$ DES EVENEMENTS.

Pour pallier ce défaut et pouvoir répondre à des questions supplémentaires de probabilité, on impose donc que l'ensemble $\mathfrak{T}$ des évènements soit une tribu :

Déf : Soit $\Omega$ un ensemble fondamental d'éventualités et $\mathfrak{T}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ ($\mathfrak{T}$ ensemble de sous-ensembles de $\Omega$). Alors $\mathfrak{T}$ est une **tribu** (ou σ-algèbre) sur $\Omega$ ssi $\mathfrak{T}$ satisfait les axiomes suivants :

(T1) $\mathfrak{T}$ contient $\Omega$ (l'univers est un évènement)

(T2) pour tout $A\in\mathfrak{T}$, $\bar{A}\in\mathfrak{T}$ (le contraire de tout évènement est un évènement)

(T3) si $\forall n\in\mathbb{N}\ A_n\in\mathfrak{T}$, $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\in\mathfrak{T}$ (toute union dénombrable d'évs est un év)

De ces trois axiomes découlent les propriétés :

(T4) $\varnothing\in\mathfrak{T}$ (l'ensemble vide est un évènement)

(T5) si $\forall n\in\mathbb{N}\ A_n\in\mathfrak{T}$, $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\in\mathfrak{T}$ (toute intersection dénombrable d'évs est un év)

Ajoutons encore, concernant les évènements :

Déf : Deux évènements sont dits incompatibles lorsque lorsqu'ils n'ont aucune éventualité en commun, c'est-à-dire lorsque $A\cap B = \varnothing$.

Prop : $A \subset B$ ssi la réalisation de A entraîne celle de B.

3) Exemples de tribus :

—$\{\varnothing ; \Omega\}$ est une tribu (peu utile)

—lorsque $\Omega$ sera dénombrable, on prendra souvent $\mathfrak{T}=\mathcal{P}(\Omega)$

—ex du lancer d'un seul dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et on peut choisir comme tribu :

- $\mathfrak{T}=\mathcal{P}(\Omega)$ si on s'intéresse au chiffre obtenu
- $\mathfrak{T}=\{\varnothing; \{2, 4, 6\}; \{1, 3, 5\}, \Omega\}$ si on s'intéresse à la parité du résultat

4) Tribu engendrée

Suite des exemples précédents : —Dans les cas où $\Omega$ est continu (ex $\Omega=\mathbb{R}$, ou $\Omega=]0 ; 1]$…) il est difficile d'expliciter la tribu mais on la définit à partir de certains évènements qu'on veut qu'elle contienne, grâce au théorème suivant :

Thm : soit $E\subset\mathcal{P}(\Omega)$ un ensemble de parties de $\Omega$, alors il existe une plus petite (pour l'inclusion) tribu $\mathfrak{T}$ qui contient tous les éléments de E ; on l'appelle tribu engendrée par E.

Ex 1 : Soit $\Omega=\{1,2,3\}$ et $E=\{\{1\}\}$. On cherche à calculer la tribu engendrée par E.

a. Montrer que si $\mathfrak{T}$ est une tribu telle que $E\subset\mathfrak{T}$ alors $\{\{1\},\{2,3\},\Omega,\varnothing\}\subset\mathfrak{T}$.

b. Montrer que $\{\{1\},\{2,3\},\Omega,\emptyset\}$ est une tribu.

c. Conclusion ?

De même dans l'exemple ci-dessus des 32 cartes, $\mathfrak{T}_1=\{T,P,Co,Ca\}$ et $\mathfrak{T}_2=\{V,D,R,A,PUF\}$ ne sont pas des tribus, néanmoins le théorème précédent permet d'affirmer qu'il existe des tribus qui les contiennent (et qui contiennent donc les évènements dont on veut calculer les probabilités).

—Dans le cas $\Omega=\mathbb{R}$, le plus souvent on utilise la tribu engendrée par $E=\{]a\,;b[,\ a,b\in\mathbb{R}\}$, appelée tribu borélienne de $\mathbb{R}$. C'est donc la plus petite tribu qui contient tous les intervalles ouverts (et aussi tous les fermés, par passage au complémentaire !)

5) Autres propriétés des évènements

DORÉNAVANT UN ÉVÈNEMENT EST UN ENSEMBLE DANS UNE TRIBU CHOISIE EN FONCTION DES OBJECTIFS DE CALCUL, UN POINT C'EST TOUT

Lois de Morgan généralisées :

si $I\subset\mathbb{N}$ fini ou infini et $(A_n)_{n\in I}$ famille au plus dénombrable d'évs (ie $\forall n\in I\ A_n\in\mathfrak{T}$), alors :

$$\overline{\bigcup_{n\in I} A_n} = \bigcap_{n\in I}\overline{A_n} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{n\in I} A_n} = \bigcup_{n\in I}\overline{A_n}$$

6) Systèmes complets d'évènements

Déf : Soit I une partie de $\mathbb{N}$ ; une partition $(A_i)_{i\in I}$ de l'univers $\Omega$ est appelée « un système complet d'évènements » en probabilités (rappel $\forall i\in I\ A_i\neq\emptyset$, $\forall i,j\ A_i\cap A_j=\emptyset$, et $\bigcup_{i\in I} A_i=\Omega$).

Thm : Décomposition d'un évènement sur un s.c.e. :

$$\forall B\in\mathfrak{T},\ B=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i) \text{ (et les } (B\cap A_i)_{i\in I} \text{ sont incompatibles)}$$

Dessin :

## II) MESURES DE PROBABILITÉ

### 1) Définition

Soit $\Omega$ un ensemble d'éventualités et $\mathfrak{T}$ une tribu d'évènements définie à partir de $\Omega$. On appelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur A une application $\mathfrak{T}\to[0\,;1]$, $A\mapsto P(A)$, telle que :

- $P(\Omega)=1$
- si $I\subset\mathbb{N}$ et $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'évènements de A deux à deux incompatibles (i.e. $A_i\cap A_j=\emptyset$ si $i\neq j$), alors $P(\bigcup_{n\in I} A_n)=\sum_{n\in I} P(A_n)$ (axiome de σ-additivité de P).

$(\Omega,\mathfrak{T},\mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Déf : si deux év. $\omega_1, \omega_2\in\Omega$ ont même probabilité ($P(\omega_1)=P(\omega_2)$) on dit qu'ils sont équiprobables.

### 2) Propriétés : soit $(\Omega,\mathfrak{T},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, alors $\forall A,B\in\mathfrak{T}$ :

- $P(\emptyset)=0$
- $P(\bar{A})=1-P(A)$
- Si $A\subset B$ alors $P(A)\leq P(B)$ et $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$

Crible de Poincaré :

- pour deux évènements $A,B\in\mathfrak{T}$ : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- pour trois évènements $A,B,C\in\mathfrak{T}$ :

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

[[Démo :

Inégalité de Boole :

Soit $I\subset\mathbb{N}$ fini ou non, alors pour toute famille d'évènements $(A_n)_{n\in I}$ incompatibles ou non, alors :

$$P(\bigcup_{n\in I} A_n)\leq\sum_{n\in I} P(A_n)$$

Rq : si évs quelconques : inégalité ; si évs incompatibles : égalité

[[Démo dans le cas I dénombrable:

3) Probabilité et système complet d'évènements :

Thm: Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ un s.c.e., alors $\forall B\in\mathfrak{T}$, $P(B)=\sum_{i\in I} P(B\cap A_i)$

[[Démo :

]]

4) Cas Ω infini dénombrable :

Ω équipotent avec $\mathbb{N}$ donc $\boxed{\Omega=\{\omega_n \,/\, n\in\mathbb{N}\},\ P(\omega_n)=p_n\in[0\,;1],\ \text{avec } \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = P(\Omega)=1}$ ;

Rq1 : en général $\mathfrak{T}=\mathcal{P}(\Omega)$ Rq2 : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ est une série convergente

Pour un ensemble $\boxed{A\in\mathfrak{T},\ P(A)=\sum_{n \text{ tq } \omega_n\in A} p_n}$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée distribution de probabilité associée à $\mathbb{P}$.

Réciproquement, pour une distribution de probabilité donnée, il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Ex 2 : $x\in\mathbb{R}^+$ ; on tire un nombre au hasard dans $\mathbb{N}$, de telle manière que $P(n)=0{,}1x^n$.

a) Quelle(s) valeur(s) peut prendre x ?

b) Quelle est la probabilité de tirer un nombre pair ?

c) Quelle est la probabilité de tirer un nombre plus grand que un milliard ?

5) Cas d'un univers Ω fini

$N=\text{card}(\Omega)<+\infty$, $\Omega=\{\omega_1, \omega_2,\ldots,\omega_N\}$, $\mathfrak{T}=\mathcal{P}(\Omega)$ en général, et à toute probabilité $\mathbb{P}$ on associe bijectivement une distribution de probabilité $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in[[1,N]]$ $P(\omega_n)=p_n$ et $\sum_{n=1}^{N} p_n =1$.

Sous-cas d'équiprobabilité

Déf : Une probabilité est dite uniforme ssi toutes les éventualités sont équiprobables.

Prop : Soit $\Omega = \{\omega 1 , ..., \omega_N\}$ un ensemble fini muni d'une probabilité uniforme.

Alors : $\forall i \in [[1,N]]$, $P(\omega i)= \dfrac{1}{N}$, et pour tout évènement $A \in \mathfrak{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A)= \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

On dit : « nombre de cas favorables (pour lesquels A est réalisé) sur nombre de cas possibles »

Rq : le cas d'équiprobabilité est impossible avec un univers infini.

# B) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

## I) Définitions et propriétés :

Ex 3: : On lance un dé cubique à 6 faces et on considère le résultat : $\Omega = [\![1, 6]\!]$, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$.

On considère les évènement $B$ : ' *le nombre obtenu est supérieur ou égal à 4* ', et $A$ : "*le nombre obtenu est pair*".

On suppose que l'on sait que $A$ est réalisé.

Plus généralement, on se donne $\Omega$ un univers fini et $A \subset \Omega$. On suppose que $\Omega$ est muni de la probabilité uniforme et que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

On veut calculer la probabilité de $B \subset \Omega$ sachant que $A$ est réalisé. Il faut alors que toute la probabilité « sachant A »soit concentrée sur A, d'où la formule :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} = \frac{\text{Card}(A \cap B)/\text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(A)/\text{Card}(\Omega)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Dessin :

Thm/Déf : Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A$ un évènement de probabilité non nulle.
Alors l'application $\mathbb{P}_A : B \in \mathscr{T} \longmapsto \mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \in [0, 1]$ définit une nouvelle mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$. $\mathbb{P}_A$ est appelée probabilité conditionnelle relativement à $A$ ou probabilité sachant $A$.

Rq : Ancienne notation : $\mathbb{P}(B|A)$.

Propriétés : Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A$ un évènement de probabilité non nulle. $\mathbb{P}_A$ est une mesure de probabilité sur A, par conséquent vérifie les propriétés des probabilités, entre autres :

$(a)$ $\mathbb{P}_A(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$ $\quad (b)$ $\forall B \in \mathscr{T}, \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$

$(c)$ $C \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}_A(C) \leqslant \mathbb{P}_A(B)$. $\quad (d)$ $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}_A(B) = 1$.

$(e)$ $P_A(C \cup B) = \mathbb{P}_A(C) + \mathbb{P}_A(B) - \mathbb{P}_A(C \cap B)$.

$(f)$ Si $(B_i)_{i \in I}$ famille finie ou dénombrable d'év. deux à deux incompatibles, $\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_A(B_i)$.

## II) Formule des probabilités composées :

Lorsque $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut écrire que : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}$.

De même, pour A, B, C$\in \mathscr{T}$ tels que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq 0$, alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)=$

Généralisation :

Thm : Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'évènements telle que : $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) \neq 0$ .
Alors : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times ... \times \mathbb{P}_{A_1\cap...\cap A_{n-1}}(A_n)$ (Formule des probabilités composées)

Démonstration : en exercice.

Rq1 : Il s'agit du principe sous-jacent à la multiplication des probabilités conditionnelles portées par les branches d'un arbre, pour obtenir la probabilité d'un évènement final.

Dessin :

Rq2 : l'intersection d'ensemble étant commutative, la formule peut s'utiliser en permutant les évènements $A_1$, $A_2$ etc... mais si les indices correspondent à un ordre chronologique dans un exercice, il vaut mieux le conserver.

Ex 4: Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire successivement 3 boules sans remise. La composition de l'urne est donc modifiée à chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches ?

Quelle est la probabilité que la première et la deuxième boule soient blanches et la troisième noire ?

## III) Formule des probabilités totales :

Thm : Soit I$\subset \mathbb{N}$ un ensemble fini ou dénombrable d'indices, et soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements (s.c.e.) fini ou dénombrable ;

*(càd une partition de $\Omega$ ; rappel : $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$ ; $\forall i \in I\ A_i \neq \emptyset$, $\forall (i,j) \in I^2$, $A_i \cap A_j = \emptyset$)*

alors, pour tout évènement $B$, on a : $\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$

Dessin :

[[ Démo :

]]

Rq : Dans le cas fini, il s'agit de la formule donnant la probabilité d'un évènement "réparti" parmi plusieurs évènements finaux d'un arbre.

Ex 5: On considère le jeu suivant : un joueur lance un dé non truqué, et il tire ensuite un jeton dans une urne choisie en fonction du résultat du dé : • l'urne $a$ est choisie quand le dé donne 1, 2 ou 3 • l'urne $b$ est choisie quand on obtient 4 ou 5 • l'urne $c$ est choisie quand on obtient 6.

Les urnes contiennent les jetons suivant : • urne $a$ : 2 jetons rouges, 3 jetons bleus • urne $b$ : 2 jetons bleus, 4 jetons verts • urne $c$ : 1 jeton vert, 1 jeton rouge.

**a.** Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge par ce procédé ?

**b.** Quelles sont les probabilités respectives d'obtenir les autres couleurs ?

Rq : la formule des probabilités totales reste valable dans le cas d'un système quasi-complet d'évènement, càd une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements pour laquelle $\forall i \in I\ A_i \neq \emptyset$, $\forall (i,j) \in I^2\ A_i \cap A_j = \emptyset$, mais $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$ (au lieu de $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$).

## IV) Formule de Bayes (probabilité des causes) :

Il est souvent utile de retourner le conditionnement : si $A$ et $B$ sont deux évènements de probabilités non nulles, alors : $\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}}$

Retour sur l'exemple des trois urnes : On obtient un jeton vert. Quelle est la probabilité que ce jeton soit issu de l'urne $B$ ?

## V) Indépendance :

### 1) Deux évènements

Déf : On dit que deux évènements $A$ et $B$ de $\Omega$ sont indépendants pour la probabilité $P$ lorsque : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. Notation : $A \perp\!\!\!\perp B$

Thm : Dans le cas où $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Autrement dit : $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si la réalisation (ou non) de $B$ n'a pas d'influence sur $A$.

Ex 6: On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Soit $A$ l'évènement : '*la carte tirée est un pique*' et $B$ : '*la carte tirée est un roi*'. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?

Prop :

- $\forall A \in \mathscr{T}$, $A$ et $\Omega$ sont indépendants et $A$ et $\varnothing$ sont indépendants.
- $\forall A, B \in \mathscr{T}$, $(A \perp\!\!\!\perp B) \iff (A \perp\!\!\!\perp \overline{B}) \iff (\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}) \iff (\overline{A} \perp\!\!\!\perp B)$.

Ex 7: On a deux urnes $U$ et $V$. Dans l'urne $U$, il y a 9 boule blanches et une boule noire. Dans l'urne $V$, il y a 3 boules blanches et 7 boules noires.

On lance un dé non pipé : si on obtient 1, alors on tire deux boules dans U successivement avec remise, sinon, on tire deux boules dans V avec remise.Soit $B_i$ l'évènement : 'la $i$-ième boule tirée est blanche' et $N_i$ : 'la $i$-ième boule tirée est noire'.

a) Les évènements $B_1$ et $N_2$ sont-ils indépendants ?

b) On obtient une boule blanche puis une boule noire. De quelle urne est-il plus probable que l'on ait tiré les deux boules ?

2) Indépendance deux-à-deux et/ou mutuelle d'une famille d'évènements :

Soit I$\subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie ou dénombrables d'évènements de la tribu $\mathscr{T}$.

Déf : On dit que les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux indépendants lorsque :

$\forall i, j \in I$ tq $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$.

Déf : On dit que les évènements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants lorsque :

pour tout sous-ensemble FINI J$\subset$I, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$

Thm : L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux

Ex 8: On lance successivement deux dés non pipés. Soient les évènements : $A_1$ : '*le premier dé amène un nombre pair*' $A_2$ : '*le deuxième dé amène un nombre impair*' $A_3$ : '*la somme des deux nombres obtenus est paire*'. Les évènements $A_1, A_2, A_3$ sont-ils indépendants deux à deux ? mutuellement ?

Prop : Soient $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, n évènements mutuellement indépendants. Alors :

• Si la famille $(B_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est telle que, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$, alors c'est une famille d'évènements mutuellement indépendants.

• Pour tout sous-ensemble d'indices J$\subset [\![1,n]\!]$, les $(A_i)_{i\in J}$ sont encore mutuellement indépendants

# C) VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES DISCRÈTES (VARD)

## I) GÉNÉRALITÉS SUR LES VAR :

### 0) Préalable : la tribu des Boréliens

La tribu usuelle sur $\mathbb{R}$ est la tribu des Boréliens $\mathscr{B}$ engendrée par les $\{\,]a;b[\ /\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (càd que $\mathscr{B}$ est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles ouverts).

Par passages aux complémentaires et unions dénombrables, on démontre que $\mathscr{B}$ est aussi la tribu engendrée par les intervalles $\{\,]-\infty;b]\ /\ b \in \mathbb{R}\}$

### 1) Déf variable aléatoire :

Ex 9: On joue à pile ou face. Si on obtient un pile on gagne 0 point sinon on gagne 1 point. On modélise en posant une fonction G (gain) : $\Omega \to \{0;\ 1\} \subset \mathbb{R}$, où $\Omega$ est l'espace probabilisé associé à cette expérience. G n'est pas laissée au hasard, c'est une fonction parfaitement connue, mais puisque le résultat $\omega \in \Omega$ est aléatoire, G($\omega$) le devient.

Dessin :

Déf technique :

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable (càd que $\mathscr{T}$ est une tribu sur $\Omega$), et $\mathscr{B}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

On appelle variable aléatoire toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall B \in \mathscr{B},\ X^{-1}(B) \in \mathscr{T}$.

« X est une VA ssi l'image réciproque par X de tout évènement de $\mathscr{B}$ doit être un évènement de $\mathscr{T}$ » ; c'est une condition nécessaire de calculabilité des probabilités des probabilités des résultats de X.

Comme la tribu $\mathscr{B}$ sur $\mathbb{R}$ est engendrée par les $\{\,]-\infty;b]\ /\ b \in \mathbb{R}\}$, ou, de manière équivalente, par les $\{\,]a;b[\ /\ a,b \in \mathbb{R}\}$, on montre :

Déf/Thm : Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable.

Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une VAR ssi $\forall\, b \in \mathbb{R},\ X^{-1}(\,]-\infty, b]\,) \in \mathscr{T}$

ssi $\forall\, a,\ b \in \mathbb{R},\ X^{-1}(\,]a, b[\,) \in \mathscr{T}$

Rq: Il existe des applications de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des va. Par exemple :

On pose $\Omega = \{1,2,3,4\}$ muni de la tribu $\mathscr{T} = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}\}$, $X : \begin{cases} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ 1 & \mapsto & 0 \\ 2 & \mapsto & 0 \\ 3 & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & 1 \end{cases}$

$X^{-1}(]-\infty, 0]) = \{1,2\} \notin \mathscr{T}$ donc $X$ n'est pas une v.a.

2) Évènements liés à une v.a.r. :

Thm/notations : $a \in \mathbb{R}$

- $[X = a] = X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$,
- $[X \geqslant a] = X^{-1}([a; +\infty[) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \geqslant a\}$,
- $[X \leqslant b] = X^{-1}(]-\infty; b]) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant b\}$,
- $[X < b] = X^{-1}(]-\infty; b[) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) < b\}$,
- $[a \leqslant X \leqslant b] = X^{-1}([a; b]) = \{\omega \in \Omega \ / \ a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$

...sont tous des évènements, càd des éléments de la tribu $\mathscr{T}$.

Plus généralement, $\boxed{\text{pour tout intervalle } I \text{ de } \mathbb{R},\ X^{-1}(I) \in \mathcal{T}}$.

Encore plus généralement :

Déf : $\left\{X^{-1}(b) \ / \ b \in \mathscr{B}\right\}$ est une sous-tribu d'évènements incluse dans $\mathscr{T}$, appelée tribu engendrée par la v.a.r. X.

Dessin :

3) Opérations sur les v.a.r. :

Thm : Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisé, et $X, Y$ deux variables aléatoires $\Omega \to \mathbb{R}$ et $\lambda$ un réel. Alors les applications suivantes sont des variables aléatoires :

**(i)** $(X+Y) : \omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$

**(ii)** $(X \times Y) : \omega \mapsto X(\omega) \times Y(\omega)$

**(iii)** $(\lambda X) : \omega \mapsto \lambda.X(\omega)$

**(iv)** $Z = (X, Y) : \omega \mapsto (X(\omega); Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$ (généralisable à $Z = (X_1; X_2; ...)$ )

**(v)** M=max(X ;Y), m=min(X,Y)

**(vi)** Y=f(X), avec f une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Rq : c'est encore vrai si f est seulement continue par morceaux ; ou si elle est seulement monotone).

4) Loi de probabilité d'une v.a.r. :

Une v.a. crée une probabilité pour les évènements de la tribu $\mathscr{B}$ sur $\mathbb{R}$ en "transportant" celle de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$

Ex 10: On lance deux dés à 6 faces ; on note S la somme des deux chiffres obtenus.

Thm/Déf : Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilité, X :$\Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r., et $\mathscr{B}$ la tribu des Boréliens sur $\mathbb{R}$. Alors l'application $\mathbb{P}_X : \begin{cases} \mathscr{B} & \to & [0;1] \\ b & \mapsto & \mathbb{P}(X^{-1}(b)) \end{cases}$ est une mesure de probabilité, appelée "loi de probabilité de la v.a.r. X". $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathbb{P}_X)$ est un nouvel espace probabilisé.

« La probabilité d'un évènement de $\mathscr{B}$ devient celle de son image réciproque par X dans $\mathscr{T}$, »

Rq :Autre notation courante : $\mathscr{L}_X$

Ex 11: Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X :$\Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto 1$ (var constante) ; donner la loi de X.

Ex 12: Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On en tire $k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) successivement.

Soit $X$ la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré. Déterminer la loi de $X$ dans les deux cas :

**a.** le tirage se fait avec remise. **b.** le tirage se fait sans remise.

Thm : Deux v.a.r. qui ont les mêmes lois de probabilité ne sont pas nécessairement égales pour toutes leur valeurs; on dit qu'elles sont "égales en loi".

Ex 13: lancer d'un dé, résultat R : R et R'=7-R ont la même loi, pourtant R≠R'

5) Fonction de répartition d'une v.a.r. :

Def : Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X :$\Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r..

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire $X$ la fonction :

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(]-\infty; x]) = \mathbb{P}_{(\Omega)}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}_{(\Omega)}(\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant x\} \end{cases}$$

Ex 14: On lance deux dés à 6 faces; on note S la somme des deux chiffres obtenus. Calculer la fonction de répartition de S.

Ex 15: On lance trois pièces et on note X le nombre de "Pile" obtenus. Calculer la loi de X et sa fonction de répartition.

Ex 16: Une durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, calculer sa fonction de répartition.

Ex 17: Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X :$\Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto 1$ (var constante); calculer la fonction de répartition de X.

Ex 18: On lance une pièce de monnaie une infinité de fois et on note Y le rang du premier "Pile" obtenu. Calculer la loi de Y et sa fonction de répartition.

Prop : • $F_X$ est croissante sur $\mathbb{R}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

• $F_X$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

• $F_X$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$

• $F_X$ est continue à gauche en tout x$\in \mathbb{R}$ tel que $P_X(x) = 0$ (càd $\mathbb{P}([X = x]) = 0$).

Rq: Une fonction est continue à gauche en x ssi $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t) = f(x)$. Ici, si $P_X(x) \neq 0$, $P_X(x)$ est la hauteur du « saut »à gauche de x : $P_X(x) = F_X(x) - \lim\limits_{\substack{t\to x\\ t<x}} F_X(t)$.

Dessin :

Rq : Thm HP : À toute fonction de répartition F :$\mathbb{R} \to [0; 1]$ satisfaisant aux propriétés ci-dessus, correspond une et une seule mesure de probabilité $P_{\mathbb{R}}$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{\mathbb{R}}(]-\infty; x])$=F(x)

## II) Variables aléatoires réelles discrètes (VARD) :

### 0) Préalable :

Déf/Thm : Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dite absolument convergente ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge vers un réel fini (càd $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} |a_n|$ existe et est un réel).

Dans ce cas on peut sommer les termes dans n'importe quel ordre et on note : $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

### 1) Définition :

Déf : Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable, et $\mathscr{B}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

On appelle variable aléatoire réelle discrète (VARD) toute VAR $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega)$ (image directe de $\Omega$ par $\mathbb{R}$) est dénombrable.

Autrement dit l'application X ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs (on dit qu'elle est "à support dénombrable").

Thm : Une VAR X est discrète ssi il existe une suite croissante de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_X(x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1.$$

Dans ce cas :

- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} P_X(x_n)$ est absolument convergente, on peut la noter $\sum_{n\in\mathbb{N}} P_X(x_n)$
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} P_X(x_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}([X = x_n]) = \sum_{x\in X(\Omega)\subset\mathbb{R}} \mathbb{P}([X = x]) = 1$

Exemples : Rang du premier "pile" dans un lancer de pièces, sommes d'un jeu de dés qui ne s'arrête que lorsqu'on obtient des six, nombre d'actions mises en vente, tirages sans fin avec remise, etc...

### 2) Évènements liés à une v.a.r.d :

Idem cas général. Dans certains cas on pourra aussi définir l'évènement $[X = +\infty]$ ou $[X = -\infty]$ (exemple : rang du premier pile d'un lancer de pièce : on pose X=$+\infty$ si pile n'apparaît jamais).

Thm : Soit $X$ une v.a.r.d. définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, telle que $X(\Omega) \supset \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $\sum_{n\in\mathbb{N}} P_X(x_n) = 1$. Alors : $\{[X = x_n] \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est un quasi s.c.e.

L'ensemble $\{[X = x_n] \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est appelé quasi-sce associé à la v.a.r.d. $X$.

### 3) Loi de probabilité d'une v.a.r.d. :

Thm : Soit X :$\Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r.d. et $X(\Omega) = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. Alors la loi de X est la probabilité $\mathbb{P}_X : \mathscr{B} \to [0; 1]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_X(x_n) = \mathbb{P}([X = x_n]) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x_n\}))$.

Ex 19: On joue à pile ou face, et on note X le rang du premier Pile. Quelle est la loi de X ?

4) Fonction de répartition d'une v.a.r.d. :

Thm (lien entre loi de X et fonction de répartition de X) : Soit X :$\Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r.d. et $X(\Omega) = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. Alors la fonction de répartition de X est

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(]-\infty; x]) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \sum\limits_{\{n\in\mathbb{N} \ / \ x_n \leqslant x\}} \mathbb{P}_X(x_n) = \sum\limits_{\{n\in\mathbb{N} \ / \ x_n \leqslant x\}} \mathbb{P}(X = x_n) \end{cases}$$

Rq : Ce sont les "fréquences cumulées croissantes" des petites classes.

## III) Variables aléatoires réelles discrètes finies (VARDF) :

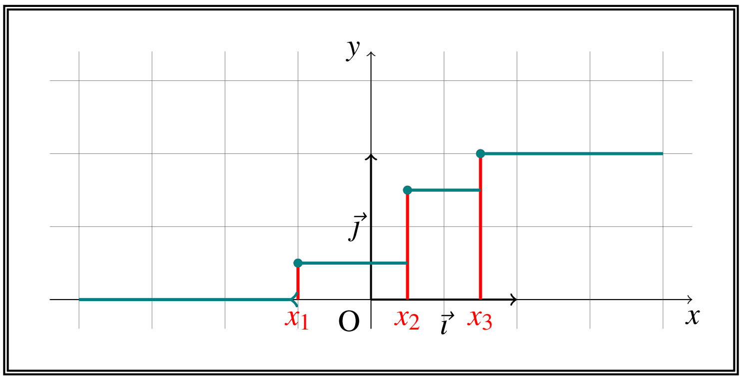
1) Définition :

Déf : On appelle variable aléatoire réelle discrète finie (VARDF) toute VARD $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega)$ est fini (on dit que X est "à support fini") : $\exists N \in \mathbb{N}$ et $x_1, x_2, ..., x_N \in \mathbb{R}$ tq $X(\Omega) = \{x_n \ / \ n \in [\![1, N]\!]\}$.

Déf : Si X est une VARDF, alors :

- $\sum\limits_{n=0}^{N} \mathbb{P}_X(x_n) = 1$
- $\mathbb{P}_X : \mathscr{B} \to [0;1]$ est telle que $\forall n \in [\![1, N]\!], \mathbb{P}_X(x_n) = \mathbb{P}([X = x_n]) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x_n\}))$
- $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(]-\infty; x]) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \sum\limits_{\{n\in[\![1,N]\!] \ / \ x_n \leqslant x\}} \mathbb{P}_X(x_n) = \sum\limits_{\{n\in[\![1,N]\!] \ / \ x_n \leqslant x\}} \mathbb{P}(X = x_n) \end{cases}$

Ex 20: Donner l'expression de la fonction de répartition tracée ci-dessous, puis en déduire la loi de la vardf associée :




2) Moments d'une vardf :

a) Espérance d'une v.a.r. finie (moment d'ordre 1) :

Déf : Soit $X$ une variable aléatoire finie définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$.

On appelle espérance de $X$ le réel défini par : $E(X) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} xP([X = x]) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P([X = x_i])$

Prop (linéarité de l'espérance) :

• $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX+b) = a\,E(X)+b$ (E(a)=a, espérance d'une vardf constante)

• Si $X$, $Y$ vardf sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, $E(a\,X + b\,Y) = a\,E(X) + b\,E(Y)$

Théorème de transfert : Soit $X$ une v.a.r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ où $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$.

Et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (ou continue par morceaux, ou au moins monotone) telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_f$ ; on pose $Y = f\,o\,X$, alors :

• $\forall\, y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P([X = x])$

• $E(Y) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} y\,P([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,P([X = x]) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,P([[X = x]_k])$

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Si X est une VAR, f une fonction et que l'on veut calculer l'espérance de Y=f(X), au lieu de calculer E(f(X))=$\displaystyle\sum_y$ (images y de f(X) $\times$ proba pour chaque valeur de f(X) d'apparaître), on peut calculer E(f(X))=$\displaystyle\sum_x$ (f(x) $\times$ proba pour chaque valeur de X d'apparaître)

Ex 21: X est une VA qui prend les valeurs -2, -1, 0, 1, 2 avec les probabilités respectives 0,1 0,2 0,2 0,3 0,2.

f est la fonction carrée. Calculez E(f(X)) de deux manières différentes.

Application : $E(X^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,P([X = x_i])$

Déf : • On appelle vardf centrée une vardf X telle que E(X)=0.

• Si X vardf, on appelle vardf centrée associée à X la vard $X^*$=X-E(X) (alors E($X^*$)=0).

b) Variance d'une v.a.r. finie (moment centré d'ordre 2) :

Déf : On appelle variance de $X$ le réel : $V(X) = E[(X - E(x))^2] = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2\,P([X = x_i])$

Prop : • Pour toute var X V(X)⩾0 et $V(X) = 0 \Leftrightarrow X = cste$

• $\forall a, b \in \mathbb{R}$, V(aX+b)=a$^2$V(X)

• $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,P([X = x_i]) - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\,P([X = x_i]\right]^2$ (formule de Koenig-Huyghens)

[[ Démo :

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Pour calculer la variance d'une VAR, il est presque toujours plus aisé de calculer E($X^2$), et de soustraire $(E(X))^2$.

$\Longrightarrow$ **Méthode:** on peut aussi calculer E(X(X-1))=E($X^2$)-EX, ou E(X(X+1)), pour obtenir E($X^2$).

Ex 22: Soit p∈]0;1[ et X une var dont la loi est donnée par P(X=1)=p et P(X=-1)=1-p.

**a.** Calculer EX et VX.

**b.** On pose Y=$\dfrac{1+X}{2}$, quelle est la loi de Y ? Calculer EY et VY.

c) Ecart type d'une v.a.r. finie :

Déf : On appelle écart type de la v.a.r. le réel positif : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Déf : • On appelle vardf centrée réduite une vardf X telle que E(X)=0 et V(X)=1.

• Si X vardf, on appelle vardf centrée réduite associée à X la vard $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ (alors E($X^*$)=0 et V($X^*$)=1).

d) Cas général, moment d'ordre r :

Déf : On appelle moment d'ordre r de la v.a. $X$ le réel : $m_r(X) = E(X^r) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^r P([X = x])$

On appelle moment centré d'ordre r de la v.a. $X$ le réel :

$$\mu_r(X) = E\left[(X - E(X))^r\right] = \sum_{x\in X(\Omega)} [x - E(X)]^r P([X = x])$$

Rq : Interprétations : moment d'ordre 1=EX ; moment centré d'ordre 2=VX ; $m_3$=paramètre de dissymétrie ; $m_5$=Kurtosis, coefficient d'aplatissement...

e) Inégalités portant sur les moments

Thm : Inégalité de Markov (probabilité qu'une variable aléatoire dépasse une valeur donnée)

On suppose que $X$ est à valeurs positives. Alors, $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$ $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$

[[Démo :

Thm : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (probabilité qu'une variable aléatoire s'éloigne de son espérance au delà d'une valeur donnée) :

Pour tout réel $a$ strictement positif, on a : $P\left(|X-E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$

[[Démo :

Ex 23: On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

**1.** Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces ?

**2.** On sait de plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine à venir soit comprise entre 40 et 60 ?

3) Lois de probabilités usuelles finies :

a) Variable aléatoire certaine (ou constante)

Déf/thm : Une variable aléatoire est dite certaine si elle ne prend qu'une seule valeur $a$ ; quasi-certaine s'il existe un élément $a$ de $X(\Omega)$ tel que $P(X=a)=1$.

Dans ces cas, $P(X=a)=1$, $E(X)=a$ et $V(X)=0$.

b) Loi uniforme

Déf/thm : Une v.a.r. $X$ suit la loi uniforme (ou équiprobable) $\mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$ ssi :

$X(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \ P(X=k)=\dfrac{1}{n}$.

Dans ce cas, $E(X)=\dfrac{n+1}{2}$ et $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$.

[[Démo :

Ex 24: On lance un dé non pipé et la v.a.r. $X$ qui donne le résultat obtenu suit la loi uniforme $\mathcal{U}_{[\![1,6]\!]}$.

Ex 25: On extrait une boule au hasard d'une urne qui contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ ($n \geqslant 1$) et si $X$ est la v.a.r. qui donne le numéro de la boule obtenue, $X$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$.

Déf : Généralisation : Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels tels que $a < b$.

Une v.a.r. $X$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}_{[\![a,b]\!]}$ ssi : $\forall k \in [\![a,b]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{b-a+1}$.

$$EX = \frac{a+b}{2}; \qquad VX = \frac{n^2-1}{12} \text{ avec } n = b-a+1$$

c) Loi de Bernoulli de paramètre p

Déf/thm : Une v.a.r. suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$, notée loi $\mathscr{B}(p)$ ssi :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } \mathbb{P}(X=1) = p, \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

Dans ce cas $E(X) = p$ et $V(X) = pq$ avec $q = 1-p$

[[Démo :

d) Loi Binomiale à n degrés de liberté, de paramètre p

Déf/thm : Une v.a.r. suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, notée loi $\mathscr{B}(n,p)$ ssi :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!], \; P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dans ce cas $E(X) = n\,p$ et $V(X) = n\,p\,q = n\,p\,(1-p)$

[[Démo :

Ex 26: Une urne contient 7 boules rouges, 4 jaunes et 3 vertes.

Le joueur tire une boule et il gagne si c'est une verte. On répète alors 3 fois l'expérience en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.

Notons $S$ l'évènement : '*tirer une boule verte*'.

Quelle est la probabilité de gagner exactement 2 fois ?

Quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ?

c)HP : Loi Hypergéométrique de paramètres $N$, $n$ et $p$

Ex 27: On tire simultanément $n$ boules, sans remise, dans une urne contenant $N$ boules dont des boules 'gagnantes' dans la proportion initiale $p$ (il y a donc $Np$ boules gagnantes dans l'urne) et des boules 'perdantes' dans la proportion $q = 1 - p$. Déterminer la loi du nombre X de boules 'gagnantes' obtenues.

Déf :Une v.a.r. suit la loi hypergéométrique de paramètres $N$, $n$ et $p$, notée loi $\mathcal{H}(n, N, p)$ ssi :

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![max(0, n - Nq), min(n, Np)]\!], \quad P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ où } q = 1 - p$$

Dans ce cas $E(X) = n\,p$

[[Démo :