CHAPITRE III Espaces vectoriels

2017-2018

A) Préalables (compléments) : Groupes, Sous-Groupes, Anneaux, Corps

0) LOIS DE COMPOSITION INTERNE (LCI)

Définition : Une Loi de Composition Interne (LCI) sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E.

Ainsi, à tout couple (a, b) d'éléments de E, on associe un unique élément $c = a * b$ de E.

Propriétés possibles :

* Commutativité : une LCI $*$ est commutative si :

$\forall\ (a,b) \in E^2,\ a * b = b * a.$

* Associativité : une LCI $*$ est associative si :

$\forall\ (a,b,c) \in E^3,\ a * (b * c) = (a * b) * c.$

* Elément neutre : un élément e de E est élément neutre pour la loi $*$ si :

$\forall\, a \in E,\ a * e = e * a = a.$

* Elément symétrisable : un élément a de E est symétrisable (ou inversible) pour la loi $*$ si :

$\exists\, b \in E,\ a * b = b * a = e$: on note alors $b = a^{-1}$.

Rmq : si $*$ est associative, l'élément neutre est unique et tout élément symétrisable possède un unique symétrique.

I) GROUPES

1) Définition : Un **groupe** est un ensemble E muni d'une LCI tel que :

- la loi $*$ est associative,
- il existe un élément neutre e pour la loi $*$ dans E,
- tout élément a de E possède dans E un symétrique a^{-1} pour la loi $*$.

Si de plus, la loi $*$ est commutative, le groupe est dit **abélien** ou **commutatif** ou **additif**. Dans ce cas on remplace souvent le symbole $*$ par $+$.

2) Exemples classiques de groupes :

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens.
- $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes abéliens.

- $(\mathbb{U}_n, \times)$ est le groupe des racines $n-i\grave{e}mes$ de l'unité.

- (S_n, o), ensemble des permutations de $(1, n)$ est un groupe non commutatif.

- L'ensemble des éléments inversibles d'un ensemble $(E, *)$ dans lequel la loi $*$ est associative et dont l'élément neutre est e, est un groupe pour la loi $*$. On le note $Inv_*(E)$.

Par exemple, $Inv_\times(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$.

3) Sous-groupes

Définition : Une partie H d'un groupe $(G, *)$ est un sous-groupe de G si :

- la loi $*$ est interne à H,

c'est-à-dire : $\forall a \in H,\ \forall b \in H,\ a * b \in H$,

- l'élément neutre e pour $*$ dans G est dans H,

- tout élément de H est inversible $\boxed{\textbf{dans } H}$: $\forall a \in H,\ a^{-1} \in H$.

Rmq : $\{e\}$ et G sont deux sous-groupes de G.

Théorème : Une partie H d'un groupe (G, $*$) est un sous-groupe du groupe G, d'élément neutre e, ssi :

- H est non vide (on vérifie en général que $e \in H$)

- $\forall\ (x, y) \in H^2,\ x * y^{-1} \in H$.

Exemples de sous-groupes classiques :

- $\mathbb{U}_n = \{\, z \in \mathbb{C},\ z^n = 1 \,\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. (dit "cyclique")

- $\mathbb{U} = \{\, z \in \mathbb{C},\ |\, z \,| = 1 \,\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Théorème (pour la culture) : Dans un groupe fini, l'ordre d'un sous-groupe (c'est-à-dire son cardinal) divise l'ordre du groupe.

C'est-à-dire : le cardinal de tout sous-groupe d'un groupe G divise le cardinal de ce groupe.

II) ANNEAUX

Définition : Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne notées $*$ et T.

On dit que $(A, *, T)$ est un **anneau** lorsque :

- $(A, *)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté 0,
- La loi T est associative, possède un élément neutre noté 1,
- La loi T est distributive par rapport à la loi $*$.

Si, de plus, la loi T est commutative, l'anneau est dit commutatif.

Exemples :

- $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif. - $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau commutatif.
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\times)$ est un anneau commutatif. - $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,o)$ est un anneau non commutatif.
- $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau non commutatif.

Dans un anneau commutatif, on peut appliquer la formule du binôme de Newton (et toutes les autres identités remarquables).

III) CORPS COMMUTATIFS

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un ensemble muni de deux lois de composition interne notées $+$ et $\times$.

On dit que $(\mathbb{K},+,\times)$ est un **corps commutatif** lorsque :

• $(\mathbb{K},+,\times)$ est un anneau,

• $(\mathbb{K}^*,\times)$ est un groupe abélien de neutre 1.

Exemples : $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps commutatifs.

B) ESPACES VECTORIELS

I) DÉFINITIONS, EXEMPLES, PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE CALCUL

1) Définition

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

Soit E un ensemble muni :

- d'une LCI notée "+"

- d'une LCE(externe) à opérateurs dans $\mathbb{K}$, notée "**.**" : $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E \longmapsto \alpha.x$

Définition : axiomes d'espaces vectoriels :

On dit que $(E,+,.)$ **est un** $\mathbb{K}-$ **espace vectoriel ou espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ **ssi :**

1) $(E,+)$ **est un groupe abélien d'élément neutre** 0_E

2) **Les quatre propriétés suivantes sont vérifiées :**

(1)

(2)

(3)

(4)

Alors les éléments de l'espace E sont appelés des VECTEURS, ceux du corps $\mathbb{K}$ des SCALAIRES.

L'élément neutre 0_E du groupe $(E,+)$ est appelé le VECTEUR NUL de l'espace.

2) Exemples d'espaces vectoriels

$\boxed{1}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des $n-$ uplets d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}^n = \left\{x = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} = (x_1, x_2, ..., x_n)\ ,\ \forall\ j \in \{1, ..., n\}\ ,\ x_j \in \mathbb{K}\right\}$$

On munit cet ensemble :

- d'une opération interne notée "**+**" :

$$\left(x = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}\ ,\ y = (y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}\right) \longmapsto s = x\boldsymbol{+}y = (s_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \text{ tels que } \forall\ j \in \{1, ..., n\}\ ,\ s_j = x_j + y_j$$

- d'une opération externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$ notée "**.**" :

$$\left(a\ ,\ x = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longmapsto t = a\boldsymbol{.}x = (t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \text{ tels que } \forall\ j \in \{1, ..., n\}\ ,\ t_j = a \times x_j$$

Alors, $(\mathbb{K}^n, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{.})$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Le vecteur nul est le $n-$ uplet : $0 = (0, 0, ..., 0)$.

$\boxed{2}$ Soit I une partie de $\mathbb{K}$ et E l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$.

On munit cet ensemble :

- d'une opération interne notée "+" dite somme des applications : $(f, g) \in E^2 \longmapsto h = f + g$ telle que : $\forall\ x \in I,\ h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

- d'une opération externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$ notée "." : $(a, f) \in \mathbb{K} \times E \longmapsto g = a.f$ telle que : $\forall\ x \in I,\ (a.f)(x) = a \times f(x)$.

Alors, $\left(\mathbb{K}^I, +, .\right)$ est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Le vecteur nul de cet espace est l'application nulle que l'on notera θ.

$\boxed{3}$ L'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations :

Loi interne notée "+" :$(u, v) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longmapsto s = u + v$ telle que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ s_n = u_n + v_n$

Loi externe notée "." :$(a, u) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longmapsto v = a.u$ telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = a \times u_n$.

Le vecteur nul de cet espace est la suite nulle que l'on notera θ : $n \in \mathbb{N} \longmapsto \theta_n = 0$.

$\boxed{4}$ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et k un entier naturel.

L'ensemble $C^k(I, \mathbb{R})$ (resp. $C^k(I, \mathbb{C})$) des applications k fois dérivable sur I et dont la k-ième dérivée est continue (applications dites "de classe C^k") à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$) est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel (resp. $\mathbb{C}-$ espace vectoriel), muni des deux opérations définies dans l'ex 2.

De même, $C^\infty(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Ici encore, le vecteur nul est la fonction nulle (notée θ) .

$\boxed{5}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ munis de l'addition des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un scalaire :

$$(a,p) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \longmapsto q = a.p \text{ tel que, si } p = \sum_{k=0}^{m} \beta_k X^k, \text{ alors } a.p = \sum_{k=0}^{m} (a \times \beta_k) X^k$$

sont des $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels.

Le vecteur nul de ces espaces est le polynôme nul que l'on a noté θ (tous ses coefficients sont nuls).

<u>Thm</u> : Les ensembles suivants, munis de leurs additions respectives et de la multiplication externe par un scalaire, sont des espaces vectoriels : $\mathbb{K}$; $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$; $\mathbb{K}[X]$; $\mathbb{K}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$; $\mathbb{K}^A$, $A \neq \emptyset$; $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; $C^k(I,\mathbb{R})$, I intervalle de $\mathbb{R}$; $C^\infty(I,\mathbb{R})$.

<u>Rq</u> : $(\mathbb{K}[X], +, \cdot_{scalaires})$ est un ev et $(\mathbb{K}[X], +, \times_{polynomes})$ est un anneau : muni de toutes les opérations, $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$ s'appelle une algèbre.

De même $(C^k(I,\mathbb{R}), +, \times, .)$ et $(\mathbb{K}^A, +, \times, .)$, et... $(\mathbb{K}[X], +, o, .)$, $(C^k(I,\mathbb{R}), +, o, .)$.

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Pour montrer qu'un ensemble E munis d'opérations + et . N'EST PAS un ev, on exhibe un contre exemple : x, y∈E avec x+y∉E, ou bien x∈E et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda x \notin E$.

<u>Ex 1:</u> $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 , x+y+z+t \leqslant 1\}$; (F,+,.) est-il un ev ?

<u>3) Règles de calcul dans un espace vectoriel</u>

(1) $\forall a \in \mathbb{K},\ a.0_E = 0_E$

(2) $\forall x \in E,\ 0.x = 0_E$

(3) $\forall a \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ a.x = 0_E \iff (a = 0 \text{ ou } x = 0_E)$

<u>4) Combinaisons linéaires</u>

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

<u>Définition</u> : Soit $\mathcal{F} = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une famille finie de vecteurs de E.

On dit qu'un vecteur x de E est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ s'il existe une famille de scalaires $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ tels que : $x = \sum_{j=1}^{p} a_j x_j$.

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\mathcal{F}$ se note $Vect(\mathcal{F})$ ou $Vect\left((x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}\right)$ (Déf 1).

Ex 2: Dans $C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, notons $f_n : t \longmapsto f_n(t) = \sin(n\,t)$ et $\mathcal{F} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Alors une combinaison linéaire de vecteurs de F s'écrira : $h = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n\, f_n$.

Ex 3: E ev et x∈E ; $\mathcal{F} = \{x\}$

Ex 4: E ev et x,y∈E ; $\mathcal{F} = \{x, y\}$

II) SOUS-ESPACES VECTORIELS

1) Définition

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F une partie de E.

Définition : On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (en abrégé : sev de E) si $(F,+,.)$ est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Autrement dit, la LCI + doit être interne dans F : $\forall x, y \in F, x+y \in F$ (càd que $(F,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$).

Et le produit par la LCE . de tout scalaire par un vecteur de F, doit être un vecteur de F : $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in F, \alpha.x \in F$.

Théorème (pratique) : Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$ ev et F **une partie de** E. F **est un sev de** E **ssi :**

- $F \neq \emptyset$

- F **est stable par combinaisons linéaires, càd :** $\forall\ (x,y) \in F^2,\ \forall\ (a,b) \in \mathbb{K}^2,\ \ a.x + b.y \in F$

$\Longrightarrow$ Méthode : Pour montrer qu'une partie F d'un ev E est un sev de E on peut montrer :

• soit que F$\neq \emptyset$ (le plus souvent - presque tout le temps - on montre que le vecteur nul 0_E appartient à F) et que $\forall\,(x,y) \in F^2,\ \forall\,(a,b) \in \mathbb{K}^2,\ \ a.x + b.y \in F$ (c'est le thm)

• soit que F$\neq \emptyset$ et que $\forall\,(x,y) \in F^2,\ x+y \in F$ et que $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in F$ (déf ci-dessus)

• soit que F$\neq \emptyset$ et que $\forall\,(x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \lambda.x + y \in F$ (autre thm équ.)

$\Longrightarrow$ Méthode : Pour montrer qu'un ensemble F muni d'une LCI + et d'une LCE . est un espace vectoriel, on peut montrer que F est un sev d'un ev (bien connu) E.

Ex 5: L'ensemble des suites convergentes est-il un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (deux méthodes) ?

Thm : pour tout ev E, $\{0_E\}$ et E sont des sev de E.

2) Sev engendré par une partie de E

Thm/Déf : Pour toute partie (ou famille de vecteurs) non vide A d'un espace-vectoriel E, Vect(A) est un sev de E.

Si Vect(A)=E on dit que A engendre E

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Pour démontrer qu'une partie non vide donnée A d'un ev E engendre E (càd E=Vect(A)), on montre que pour tout vecteur x∈E, x est égal à une combinaison linéaire de vecteurs de A.

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Pour trouver une partie/famille génératrice A d'un ev E (càd telle que E=Vect(A)), on trouve une famille de vecteurs telle que tout vecteur de E est une combinaison linéaire de ces vecteurs ; la partie génératrice est l'ensemble de ces vecteurs.

Ex 6: Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E,\ x - y + z = 0\ (*) \right\}$. Montrer que H est un sev de E, et déterminer une famille génératrice de H.

Thm : Si $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ sont des familles de vecteurs de E alors :

- $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \Longrightarrow Vect\left(\mathcal{F}_2\right) \subset Vect\left(\mathcal{F}_1\right)$
- $\mathcal{F}_2 \subset Vect\left(\mathcal{F}_1\right) \Longrightarrow Vect\left(\mathcal{F}_2\right) \subset Vect\left(\mathcal{F}_1\right)$, « Si les vecteurs de F2 sont des CL des vecteurs de F1, alors les CL de vecteurs de F2 sont des CL de vecteurs de F1 »

Ex 7: Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 3, -2)$ et $u_4 = (1, 4, -3)$.

Est-il vrai que Vect$(u_1, u_2) =$ Vect(u_3, u_4) ?

3) Intersections de sevs d'un ev E

Thm : L'intersection de plusieurs sev de E est encore un sev de E :

$\forall \ (F_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ **sevs de** E, $\bigcap_{j=1}^{p} F_j$ **est un sev de** E**.**

De même pour une famille infinie de sevs : $\bigcap_{j=1}^{+\infty} F_j$ **est un sev de** E

⟦Démo :

Rq1 : L'intersection de deux sev n'est jamais vide car elle contient obligatoirement le vecteur nul.

Rq2 : ⚠En général, la réunion de deux sevs de E n'est pas un sev de E..

Contre-exemple : E=$\mathbb{R}^2$, $F_1 = Vect((1,0))$ et $F_2 = Vect((0,1))$

Déf 2 : Si A est une partie d'un sev E, $Vect\ (\mathcal{A})$ est l'intersection de tous les sevs contenant A.

Déf 3 : C'est le plus petit (pour l'inclusion) sev de E contenant A.

⟦Démo : en TD

4) Somme de sevs de E

Définition : Soient F_1 et F_2 deux sev de E.

On appelle somme des sev F_1 et F_2 l'ensemble : $F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 \ / \ x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2\}$.

De même avec k sevs : $F_1 + F_2 + ... + F_k = \{x_1 + x_2 + ... + x_k \ / \ x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2, \ldots, x_k \in F_k\}$.

Prop1 : $F_1 + F_2$ est un sev de E et $F_1 + F_2 = Vect\,(F_1 \cup F_2)$

[[Démo :

Prop2 : $F_1 \subset F_1 + F_2$ et $F_2 \subset F_1 + F_2$.

[[Démo :

⚠Il n'y a pas unicité de la somme qui conduit à un vecteur de $F_1 + F_2$. Contre-exemple :

Considérons $E = \mathbb{R}^3$, $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (0,1,2)$.

Notons alors $F_1 = Vect\,(u_1, u_2)$ et $F_2 = Vect\,(u_2, u_3)$, et considérons $w = (1,2,0)$.

⚠On peut avoir F+G=F+H (F, G , H sev d'un ev E) sans avoir G=H. Contre-exemple : E=$\mathbb{R}^3$, F=Vect((1 ;0 ;0)), G=Vect((0 ;1 ;0)) et H=Vect((1 ;1 ;0)).

5) Somme directe de sevs de E

Déf1 : On dit que deux sev F_1 et F_2 de E sont en somme directe ou que la somme $F_1 + F_2$ est directe ssi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

On note dans ce cas : $\boxed{H = F_1 \oplus F_2}$.

⚠Déf non généralisable à plus de deux sevs.

Ex 8: Dans $E = \mathbb{R}^3$, montrer que les deux sous-espaces $F = \{u = (x, y, z),\ x + y + z = 0\}$ et $G = \text{ Vect}(1, 1, 1)\}$ sont en somme directe.

Thm (Déf2) : La somme $F_1 + F_2$ est directe ssi tout vecteur $w \in F_1 + F_2$ se décompose de manière unique en $w = u + v$ avec $u \in F_1, v \in F_2$.

Déf : avec k sevs : la somme $F_1 + F_2 + ... + F_k$ est directe ssi tout vecteur $w \in F_1 + F_2 + ... + F_k$ se décompose de manière unique en $w = u_1 + u_2 + ... + u_k$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_i \in F_i$.

[[Démo :

$\Longrightarrow$ Méthode: Pour prouver que deux sevs F, G d'un ev E sont en somme directe on montre :

• soit que F∩G=$\left\{\overrightarrow{0}\right\}$

• soit (plus long) que tout vecteur de F+G se décompose de manière unique en une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

⚠On peut avoir F⊕G=F⊕H (F, G , H sev d'un ev E) sans avoir G=H. Même contre-exemple que pour F+G=F+H avec G≠H :

Lorsque $E = F_1 \oplus F_2$, on dit que les deux sev F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E.

Dans ce cas, tout vecteur de E se décompose de façon unique en la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.

Thm : tout sev F d'un ev E admet au moins un supplémentaire dans E (admis).

$\Longrightarrow$ Méthode: Pour montrer que $E = F_1 \oplus F_2$, on peut montrer :

• soit que tout vecteur de E se décompose de façon unique en la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.

• soit que tout vecteur de E se décompose en la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 ET que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

Ex 9: $E = \mathbb{R}^3$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E,\ x - y + z = 0\ (*) \right\}$, $G = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; montrer que H et G sont supplémentaires.

III) FAMILLES LIBRES, LIÉES, GÉNÉRATRICES - BASES

1) Familles libres, liées

a) Familles finies :

Déf : Soit $\mathcal{F} = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une famille (ou partie indexée) finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

• $\mathcal{F}$ est **libre** ssi **pour toute** famille $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de scalaires, $\sum_{j=1}^{p} a_j x_j = 0_E \Longrightarrow \forall j \in \{1, ..., p\}$, $a_j = 0$

(« toute combinaison linéaire nulle de vecteurs de $\mathcal{F}$ a tous ses coefficients nuls »)

• $\mathcal{F}$ est **liée** ssi elle n'est pas libre, càd ssi **il existe au moins une** famille $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de scalaires **non tous nuls** tels que $\sum_{j=1}^{p} a_j x_j = 0_E$

(« il existe une combinaison linéaire nulle de vecteurs de $\mathcal{F}$ dont tous les coefficients ne sont pas nuls »)

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Pour prouver qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ est liée, on cherche UNE combinaison linéaire nulle $\sum_{j=1}^{p} a_j x_j = 0_E$ aux coefficients $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ NON TOUS nuls.

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Pour prouver qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ est libre, on montre que pour TOUTE combinaison linéaire nulle $\sum_{j=1}^{p} a_j x_j = 0_E$, alors les coefficients $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ sont TOUS nuls.

Ex 10: Dans $\mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est-elle libre ou liée ?

b) Familles infinies :

Déf : Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E, $\mathcal{F}$ de cardinal infini, est libre ssi toute famille FINIE de $\mathcal{F}$ est libre ; elle est liée ssi il existe une famille FINIE liée dans $\mathcal{F}$.

Ex 11: (en TD) Soit E=$\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que la famille $\left(x \mapsto e^{kx}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

c) Propriétés :

Propriétés :

(i) Toute sous-famille de vecteurs d'une famille libre est libre.

(ii) Toute famille de vecteurs contenant une famille liée est liée.

(iii) Une famille qui contient deux vecteurs égaux est liée.

(iv) Une famille qui contient le vecteur nul est liée.

(v) Cas d'une famille de deux vecteurs : $\mathcal{F} = (u, v)$ est liée ssi u et v sont colinéaires (càd ssi il existe k∈$\mathbb{R}$tel que v=ku ou u=kv)

(vi) Une famille $\mathcal{F} = ((x_j)_{j\in I})$ de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres.

Démo de (vi) :

Thm (ajout d'un vecteur à une famille libre) :

Soit $\mathcal{Y} = \{(y_j)_{1\leqslant j\leqslant p}\}$ une famille de **vecteurs libres** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $y \in E$.

Alors : $\mathcal{Y} \cup \{y\}$ famille liée $\Longleftrightarrow y \in \text{Vect}(\mathcal{Y})$.

Thm équivalent : $\mathcal{Y} \cup \{y\}$ libre $\Longleftrightarrow y \notin \text{Vect}(\mathcal{Y})$

⟦Démo :

2) Familles génératrices, bases

Thm : Une famille $\mathcal{G} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ est génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (càd, rappel, Vect($\mathcal{G}$)=E)

ssi : $\forall\, x \in E,\ \exists\,(\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ tels que $x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\, e_j$

Prop : Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice

Déf : Une famille génératrice ET libre est appelée une base de E.

Ex 12: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ n'est que génératrice.

Ex 13: Soit E=$\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La famille $\left(x \mapsto e^{kx}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle génératrice de E ?

Thm : Une famille $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$, càd ssi :

$$\forall\, x \in E,\ \exists\,!\,(\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant p} \in \mathbb{K}^p \ \text{ tels que } \ x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\, e_j$$

Cette écriture s'appelle la **décomposition** de x dans la base $\mathcal{B}$; les $(\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ sont les **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

⟦Démo :

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée on écrit le vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Ex 14: Soit E=$\mathbb{K}_3$[X] et P=1+X+X^2 $\in \mathbb{K}_3[X]$, quelles sont les coordonnées de P dans la base canonique de E ? Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\left\{1;(X-1);(X-1)^2;(X-1)^3\right\}$?

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Pour prouver qu'une famille $\mathcal{B}$ est une base de E, on prouve

• soit qu'elle est génératrice et libre

• soit que tout vecteur de E se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}$ (càd est égal à une unique C.L. de vecteurs de $\mathcal{B}$)

Par la seconde méthode on aura en même temps les coordonnées si elles sont demandées.

Ex 15: Soit $\mathcal{B} = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et pour tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ calculer les coordonnées de (x,y,z) dans $\mathcal{B}$.

Thm (admis) : TOUT EV ADMET UNE BASE

Thm : Une famille $\mathcal{B}$ de cardinal infini est une base d'un $\mathbb{K}$-ev E ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$.

Ex 16: Base de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

IV) CAS DE LA DIMENSION FINIE

1) Dimension d'un ev, définition

Déf : Un $\mathbb{K}$-ev E est dit de **dimension finie** ssi il possède une famille génératrice finie.

Déf/Thm de dimension :

(i) Si E est un $\mathbb{K}$-ev de type fini, il admet des bases qui ont toutes le même nombre d'éléments. Ce nombre, qui ne dépend que de $\mathbb{K}$ et de E, est appelé **dimension** de E sur $\mathbb{K}$et noté $\mathbf{dim}(E)$.

(ii) Toutes les familles libres sont de cardinal au plus n ;

(iii) toutes les familles génératrices sont de cardinal au moins n.

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel E, on cherche une base de E (càd une famille de vecteurs telle que tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille).

Ex 17: On définit dans $E = \mathbb{R}^4$ les deux sous-espaces vectoriels : $F_1 = \{(x, y, z, t) \in E,\ x - y + 2z - 3t = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z, t) \in E,\ x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.

a. Exhiber des bases et les dimensions de F_1 et de F_2.

b. Préciser $F_1 \cap F_2$.

Thm : $\mathbb{K}^n$ est de dim n, $\mathbb{K}_n[X]$ de dim n+1, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont de dim infinie.

2) Bases et dimensions : propriétés

Thm des familles de cardinal dim(E) : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de n vecteurs de E. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathcal{B}$ est une base de E.

(2) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E. (3) $\mathcal{B}$ est une famille libre dans E.

⟦Démo :

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Dans un ev E de dim n, pour prouver qu'une famille de vecteurs de cardinal n est une base, il suffit de prouver qu'elle est libre, ou qu'elle est génératrice

Ex 18: Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon, décrire le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

a. $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (3,0,-1)$ et $v_3 = (-1,1,-1)$.

b. $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (3,0,-1)$ et $v_3 = (1,8,13)$.

c. $v_1 = (1,2,-3)$, $v_2 = (1,0,-1)$ et $v_3 = (1,10,11)$.

Théorème de la base incomplète : Soit E un ev de dimension n, $\mathcal{L} = (\ell_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille libre de E, et $\mathcal{G} = (g_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$, une famille génératrice de E. Alors on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E en lui ajoutant n-p vecteurs de $\mathcal{G}$.

⟦Démo :

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Souvent dans les exercices on dispose d'une famille libre $\mathcal{L}$, et d'une base évidente ("canonique") $\mathcal{BC}$; $\mathcal{BC}$ étant par définition génératrice on peut obtenir une deuxième base en complétant $\mathcal{L}$ par des vecteurs bien choisis de $\mathcal{BC}$.

Ex 19: On pose $e_1 = (1,1,0,0)$ et $e_2 = (-1,1,-1,1)$ compléter la famille $\{e_1, e_2\}$ en une base de $\mathbb{R}^4$

Corollaire : Dans un ev de dimension finie n, de toute famille génératrice de cardinal p on peut extraire une base de E en lui ôtant p-n vecteurs.

$\Longrightarrow$ **Méthode:** Souvent dans les exercices on dispose d'une famille génératrice $\mathcal{G}$, on en extrait une base en enlevant un par un les vecteurs qui sont C.L. d'autres vecteurs de $\mathcal{G}$, jusqu'à obtenir une famille libre.

Ex 20: On pose $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (-1,1)$, $e_3 = (1,0)$, $e_4 = (1,2)$ réduire (e_1, e_2, e_3, e_4) en une base de $\mathbb{R}^2$

3) Sevs et dimensions : propriétés

Soit E un ev de dim finie n$\in\mathbb{N}$, et F un sev de E, alors :

Propriétés :

(i) $\dim(F) \leqslant n$; $\dim(F) = \dim(E)$ ssi $F = E$.

(ii) F possède des supplémentaires dans E.

(iii) si $E = F \oplus G$, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

(iv) si F, G sevs de E, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ (formule de Grassman)

$[\![$Démo :

Thm : Soient E ev de dim finie et F, G deux sev de E ; si deux des propriétés ci-dessous sont réalisées, alors la troisième l'est aussi, et dans ce cas E=F$\oplus$ G

(i) E=F+G

(ii) F$\cap$G=$\{0_E\}$

(iii) dim(F)+dim(G)=dim(E)

Autre caractérisation :

Thm (caractérisation de supplémentaires par les bases) : Soient E ev de dim finie et F, G deux sev de E, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$

(ii) il existe une base $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, ..., f_q)$ de F et une base $\mathcal{B}_G = (g_1, g_2, ..., g_r)$ de G telles que $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G = (f_1, f_2, ..., f_q, g_1, g_2, ..., g_r)$ est une base de E

(iii) pour toute base $\mathcal{B}_F$ de F et toute base $\mathcal{B}_G$ de G alors $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E.

⟦Démo :

Application :

Thm : F et G sont en somme directe ssi il existe une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G telles que $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de (F+G).

⟦Démo :

Cas d'une somme de plus de deux sevs :

Thm (caractérisation de supplémentaires par les dimensions) : Soient E espace vectoriel de dim finie et $F_1, F_2, ..., F_k$ k sevs de E ; alors $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_k$ ssi $E = E_1 + E_2 + ... + E_k$ et $dim(E) = dim(E_1) + dim(E_2) + ... + dim(E_k)$.

Thm (caractérisation de supplémentaires par les bases) : Soient E ev de dim finie et $F_1, F_2, ..., F_k$ k sevs de E ; alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_k$

(ii) il existe des bases $\mathcal{B}_1$ de F_1, $\mathcal{B}_2$ de F_2, ... , $\mathcal{B}_k$ de F_K telles que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_k$ est une base de E

(iii) pour toutes bases $\mathcal{B}_1$ de F_1, $\mathcal{B}_2$ de F_2, ... , $\mathcal{B}_k$ de F_K, alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_k$ est une base de E.

4) Quelques types de sevs particuliers

Def :

- Un ev de dim 1 est une droite vectorielle
- Un ev de dim 2 est un plan vectoriel.
- Si E est un espace vectoriel de dimension n, tout sous-espace de E de dimension $n-1$ s'appelle un hyperplan de E.

Ainsi, un sous-espace H de E est un hyperplan de E si et seulement s'il possède une droite vectorielle de E supplémentaire dans E : $\boxed{H \text{ hyperplan de } E \iff \exists\, a \in E \,,\, E = H \oplus \mathbb{K}\, a}$

⟦Démo :

Rq: Définition valable en dimension ∞.

5) Applications : rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = \{u_1, ..., u_p\}$ une famille de vecteurs de E.

Def :

On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$:

$$\mathbf{rg}\,(\mathcal{F}) \;=\; \dim\, \mathbf{Vect}\,(\mathcal{F})$$

Prop :

- si $\dim E = n$, $\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) \leqslant n$.
- $\mathrm{rg}\,(\mathcal{F})$ est le plus grand nombre de vecteurs libres que l'on peut extraire de la famille $\mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim E$.